×I60×
ÉCOLE NATIONALE DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET DES MINES D'ALES 1977

(4 h.)

Problème I

Soient f, g, h, les fonctions de la variable réelle x, telles que :

$$f(x) = -x + \text{Arg th } x$$

$$g(x) = \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$

$$h = f - g$$

I. 1) Déterminer l'intervalle D de $\mathbb{R}$ sur lequel ces trois fonctions sont simultanément définies.

2) Etudier la fonction f sur D : parité, branches infinies, sens de variation.

3) Etudier de même la fonction g sur D.

4) De l'étude des variations de la fonction h sur D, déduire le signe de h(x) pour toute valeur x de D.

Construire alors, dans un même repère les courbes représentatives des fonctions f et g pour x appartenant à D.

II. 1) Déterminer une primitive F de f pour x appartenant à D.

2) Montrer que f est une solution particulière pour x appartenant à D de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad 2(1-x^2)\,y' + 2x\,y = x \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

Trouver l'intégrale générale de (E) sur les intervalles :

$$]-\infty, -1[\; ; \;]-1, 1[\; ; \;]1, +\infty[.$$

III. 1) Exprimer sous forme d'un logarithme népérien le réel :

$$a = (2n+1)\, f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

Calculer le réel :

$$b = (2n+1)\, g\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

Comparer les réels : e^a et 1 ; e^a et e^b.

(e, est la base des logarithmes népériens).

2) Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour n supérieur ou égal à 1, par :

$$u_n = \frac{n^{\frac{2n+1}{2}} . e^{-n}}{n!} \quad ; \quad v_n = u_n . e^{\frac{1}{12n}}$$

Etudier le sens de variation de chacune de ces suites.

3) Comparer u_n et v_n pour toute valeur de n supérieure ou égale à 1 et montrer que ces deux suites sont adjacentes.

En déduire la nature de ces suites.

Problème II

$\mathcal{E}$ désigne l'espace affine de direction l'espace vectoriel E et de repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

.../...

f est une application affine de $\mathcal{E}$ laissant O invariant ; φ est l'endomorphisme associé à f.

On suppose que la matrice de φ appartient à M U M' U M'' U M'''

où :

M est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -b & o \\ b & a-b & o \\ o & o & 1 \end{pmatrix}$

M' est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -a+b & o \\ b & -a. & o \\ o & o & 1 \end{pmatrix}$

M'' est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -b & o \\ b & a-b & o \\ o & o & -1 \end{pmatrix}$

M''' est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -a+b & o \\ b & -a & o \\ o & o & -1 \end{pmatrix}$

les réels a et b vérifiant la relation :

$$a^2 + b^2 - ab = 1$$

A tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) on associe le nombre réel :

$$N(\vec{u}) = x^2 + y^2 + z^2 - xy$$

I - 1) Montrer que tout élément de M U M' U M'' U M''' a un inverse que l'on calculera.

2) Quelle est la nature de f lorsque la matrice de φ appartient à M' U M''' ?

Déterminer avec précision l'application f_o correspondant à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & o & o \\ 1 & -1 & o \\ o & o & 1 \end{pmatrix}$$

et l'application f_1 correspondant à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & o \\ o & -1 & o \\ o & o & -1 \end{pmatrix}$$

3) Montrer que M U M' U M'' U M''' est un groupe pour la multiplication des matrices et que M en est un sous groupe commutatif.

4) Montrer que, quel que soit $\vec{u}$ élément de E : $N[\varphi(\vec{u})] = N(\vec{u})$.

5) Soit S l'ensemble des points P de $\mathcal{E}$ tels que $N(\overrightarrow{OP}) = 1$
Montrer que S est invariant par f.

II - Soit Φ l'application de E x E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi(\vec{u}, \vec{u'}) = xx' + yy' + zz' - \frac{1}{2}(xy' + yx')$$

où (x, y, z) et (x', y', z') désignent respectivement les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposée directe.

1) Montrer que Φ est un produit scalaire. Définir la norme associée.

2) On suppose que l'espace vectoriel E est muni de la norme euclidienne précédente. Reconnaître alors S.

3) Quelle est la nature de φ quand sa matrice appartient à M ; à M' ; à M'' ; à M''' ? Calculer l'angle des vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail